

**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ****ETAPA LOCALĂ****07 .02.2026****CLASA a XI-a****Subiectul I (21 puncte)**

Fie mulțimea  $M = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \mid \exists k \in \mathbb{N}, k \geq 2, X^k = O_2\}$ .

- a) Arătați că dacă  $X \in M \Rightarrow X^2 = O_2$ .
- b) Calculați  $\det(I_2 + A + A^2 + \dots + A^{2026})$  unde  $A \in M$ .
- c) Studiați surjectivitatea funcției  $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{C}), f(X) = X^{2026}$ .

**Subiectul II (21 puncte)**

Se consideră șirul  $(x_n)_{n \geq 1}$  cu termenul general  $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+n+k}$ .

Calculați  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  și  $\lim_{n \rightarrow \infty} n(1 - x_n)$ .

**Subiectul III (21 puncte)**

- a) Fie  $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  astfel încât  $AB = BA$ . Arătați că  $\det(A^2 + B^2) \geq 0$
- b) Dacă  $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  și  $\det(X) > 0$  arătați că  $\det(X - I_n + X^{-1}) \geq 0$

**Supliment GM****Subiectul IV (21 puncte)**

Fie un șir de numere reale  $(a_n)_{n \geq 1}$ , pentru care  $a_1 > 1$  și  $a_{n+1} = \sqrt{a_n}(1 + \sqrt{a_n}) - 1$  pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Calculați  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$  și  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 4 \cdot a_n}{n \cdot \ln n}$ .

**NOTĂ:** Toate subiectele sunt obligatorii

*Se acordă 16 puncte din oficiu.*

*Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.*